



# Applications of asymptotic methods in statistics to item response theory

著者	小笠原 春彦
号	4
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	教情第3号
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10097/60362">http://hdl.handle.net/10097/60362</a>

小笠原 春彦

学位授与の要件                      学位規則第4条2項該当

(教育学研究科)

## 〈論文内容の要旨〉

第1章では統計モデルにおけるパラメータが現実には推定量であることの問題の導入後、以下の章で共通に用いられる漸近展開の方法を述べた。推定量の確率展開によって4次まで

の漸近キュミュラントと高次漸近分散が導出された。これらの結果はパラメータの母集団値の区間推定において高次の漸近精度を与えるものである。

第2章では項目パラメータが既知の場合の項目反応理論における能力パラメータの最尤推定量とその変換の分布の漸近近似を通常の正規近似を超えて導出した。その漸近近似のために推定量の4次までの漸近キュミュラントと高次漸近分散をモデルの誤特定の場合を含めて求めた。また、能力の検定と区間推定が可能となる、4種類にステューデント化されたピボットの漸近キュミュラントを得た。

第3章では項目反応理論における能力のベイズ及び擬似ベイズ推定量の4次までの漸近キュミュラントと高次漸近分散をモデルの誤特定がありうる場合について求めた。これらの推定量は一般的なウェイトを持つ加重スコア推定量の特殊な場合として扱われた。さらに、ステューデント化後の推定量の漸近キュミュラントも導出した。平均2乗誤差の比較から標準正規分布を事前分布に用いたベイズモード推定量が点推定の場合に推奨された。しかし、区間推定ではステューデント化後の推定量のバイアスの小さい最尤推定量が推奨された。

第4章では能力パラメータが積分消去された場合の項目パラメータの推定量について、第2・3章の結果に対応するものを求めた。すなわち項目反応理論における項目パラメータの周辺尤度を用いたベイズ推定量の4次までの漸近キュミュラントと高次漸近分散をモデルの誤特定がありうる場合について求めた。これらのうち漸近キュミュラントが最尤解のものと異なるのは1次および高次分散のみであった。ステューデント化したベイズ推定量と漸近的なバイアスを修正したベイズ推定量の4次までの漸近キュミュラントと高次漸近分散も求めた。バイアス修正したベイズ推定量の漸近キュミュラントはバイアス修正した最尤推定量のものと4次までは同一となることが示された。

第5章は前章までにおいて固定値とみなした項目パラメータについて、その標本変動を考慮した上で別のグループの被験者の能力パラメータの推定量の漸近的性質を扱った。特に項目の尺度化のための被験者数と能力パラメータの推定のための項目数の比に関して3つの漸近的条件の下での能力パラメータの推定量の漸近的結果を与え、そのうち2つの条件は項目パラメータの推定量の標本変動を無視することができる部分的な根拠を与えた。

この論文の第2の部分は推定量の期待2乗誤差(MSE)に関するもので、ここでは推定量の漸近展開に基づく漸近期待2乗誤差(AMSE)の場合を扱った。

第6章では最尤推定量を典型とする推定量に関して、漸近期待2乗誤差を最小化するバイアス調整の方法を導出した。一般にこの調整は未知のパラメータを含むが、未知のパラメータを含まないいくつかの場合が示された。ロジットの場合では、漸近不偏の推定量と最尤推定量のいずれよりも漸近期待2乗誤差を小さくする、バイアス調整の適切な固定値が得られた。

第7章では指数分布族におけるスカラーのカノニカルパラメータの推定量の漸近的性質を与え、特に十分統計量の歪度の2乗と尖度の比が重要であることを示した。なお、項目反応理論においては項目パラメータが与えられた場合、2パラメータロジスティックモデルの能力パラメータは指数分布族におけるカノニカルパラメータであることが知られている。

第8・9章では項目反応理論において項目パラメータが既知の場合の能力パラメータの推

定量の AMSE の縮小化を異なる方法で扱っている。第 8 章では第 6 章のバイアス調整の方法を採用した。この場合バイアス調整の最適値は未知の母集団値に依存するが、特別な場合に母集団値に依存しないある最適値の下限が求まり、これが一般的なモデルでも有用であることが示された。第 9 章は同様の課題を擬似度数を用いて扱い、最適な擬似度数を第 8 章と同様に求めた。

第 10 章では残された問題として、項目反応理論における複数のパラメータの推定量の行列期待 2 乗誤差の集約値について述べた。

## ＜ 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 ＞

本論文は全部で 10 章の構成になっており、導入の第 1 章と今後の課題を扱った第 10 章を除いて第 2 章から 5 章までの前半と第 6 章から 9 章までの後半に大きく区分される。前半では項目反応理論における能力と困難度や識別性等のテスト項目を特徴づけるパラメータの推定量の問題を扱っている。後半の第 6 章から 9 章では能力パラメータの推定量の平均二乗誤差を漸近的に最小化する推定量を構成する問題を扱っている。

項目反応理論についての理論統計学からの研究は少なく、テストデータへのモデル応用を対象としたものが多い。そうした現状の中で、項目反応理論モデルの項目パラメータと能力パラメータの推定量についての理論統計学的検討を、漸近的方法をもちいて体系的に行ったことに本論文の特質性がある。それにより、項目反応理論モデルの実際のテストデータ分析への応用の正当性を理論上から証明し、またモデル応用についての実質的な新たな提言を行ったものである。

平成 26 年 8 月 13 日午前 10 時から 12 時まで、教育学部棟 3 階小会議室で小笠原春彦氏の博士論文審査会が、博士論文提出者の小笠原春彦氏の他、論文審査委員の村木英治教授（主査）、柴山直教授、倉元直樹准教授、中島平准教授の出席で行われた。論文の内容について口述発表が小笠原氏によって一時間ほど行われ、そして 30 分ほど各審査委員から質疑とコメントがなされた。

論文審査の結果、以下の点が指摘された。

第 1 に項目反応理論モデルのパラメータ推定量の検討に漸近理論という理論統計学的分析は理論統計学の高度な知識を必要とする大変に困難なトピックである。それだけにこの研究は独創的であり、項目反応理論モデルのテストデータ分析に関して新たな知見が得られたものとして評価できる。項目パラメータと能力パラメータ推定量の両方の理論的分析を同時に体系的に行った点は、今後のパラメータ推定法の研究および項目反応理論モデルの理論統計学における新たな研究の方向性を提示したものとして意義がある。

第 2 に、徹底的な項目反応理論モデルのパラメータの統計学的検討がなされているという点が評価できる。それにより、モデルの正当性が明らかにされ、今後、パラメータ推定法の研究およびモデル応用における重要な知見として高く評価される。

第 3 に、理論的に確かめられた知見をシミュレーションにより、データを用いて分析し、

実証した点が評価される。

論文に記述された数式を用いて行われたシミュレーションでは矛盾する結果がでなかったこと、これまでの小笠原氏のこの分野で発表された論文で発表された数式を基に本論文の数式はさらに展開されたものである点が確認された。必要な数式は十分に展開されており、結論もそれをサポートしており、また項目反応理論をもちいる教育テストデータの分析の実務にこの理論的な博士論文はおおきな貢献であると判断される。

よって、本論文は博士（教育情報学）の学位論文として合格と認める。